Title	On sectional curvature of Boggino-Damek-Ricci type spaces (Homogeneous Structures and Theory of Submanifolds)
Author(s)	宇野, 公貴
Citation	数理解析研究所講究録 (1998), 1069: 63-72
Issue Date	1998-11
URL	http://hdl.handle.net/2433/62539
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1069 巻 1998 年 63-72

On sectional curvature of Boggino-Damek-Ricci type spaces

大阪大学理学研究科数学専攻 D1
宇野 公貴 (Masataka Uno)

1 Intoroduction

Boggino [B] は, Heisenberg type の Lie 環のある種の一次元拡張が定める単連結可解 Lie 群が, 非正の断面曲率をもつ Einstein 多様体であることを示した. これらの空間は, rank one の非コンパクト型対称空間を含んでおり, 現在, Damek-Ricci space と呼ばれている. 更に, 多くの非正の断面曲率をもつ Einstein 多様体を見つけるために, Damek-Ricci space を一般化した可解 Lie 群のあるクラスを考える. 即ち, $\{\mathfrak{n}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{n}}\}$ を正定値内積をもつ 2-step nilpotent Lie 環とし, $\mathfrak{a}$ を一次元のベクトル空間, A を $\mathfrak{a}$ の零でないベクトルとする. $\mathfrak{n}$ の中心を $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}$ の $\mathfrak{n}$ における直交補空間を $\mathfrak{v}$ と書く. $k \in \mathbb{R}^+$ に対して, $\mathfrak{a}$ の $\mathfrak{n}$ 上の表現 f を

$$f(A)V = \frac{k}{2}V \qquad f(A)Z = kZ \qquad \text{for all } V \in \mathfrak{v},\ Z \in \mathfrak{z}$$

で定める. f により $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{n}$ 上 derivation として作用するので, $\mathfrak{n}$ と $\mathfrak{a}$ の半直積 $\mathfrak{s}_k(A;\mathfrak{n}) := \mathfrak{n}\times_f\mathfrak{a}$ は可解 Lie 環となる. $\mathfrak{a}$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{a}}$ を $\langle A, A\rangle_{\mathfrak{a}} = 1$ で定め, $\mathfrak{s}_k(A;\mathfrak{n})$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{a}}$ と $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{n}}$ の直和で定める. このようにして得られた正定値内積をもつ可解 Lie 環 $\{\mathfrak{s}_k(A;\mathfrak{n}), \langle\ ,\ \rangle\}$ が定める単連結可解 Lie 群 $S_k(A;\mathfrak{n})$ とその上の左不変計量 g の組 $\{S_k(A;\mathfrak{n}), g\}$ を Boggino-Damek-Ricci type space (略して, BDR-type space) という. ここで, BDR type space に非正の断面曲率をもつ Einstein 計量が存在するかという問題があり, 森 [M], 山田 [Y] 等によって研究されている. この問題の解決には, BDR-type space が非正の断面曲率をもつ条件を知ることが重要である. 今回の目的は, BDR-type space の断面曲率が非正になる最小の k の値を定めることで, 特に, BDR-type space の nilpotent part が階段型の Lie 環の場合について調べた. 即ち,

$$\begin{pmatrix} 0 & A & C \\ 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(但し，A, B, C は，それぞれ $n \times m$, $m \times l$, $n \times l$ 実行列）型の実行列全体がつくる $(nm + ml + nl)$ 次元の 2-step nilpotent Lie 環を $\mathfrak{n}(n, m, l; \mathbb{R})$ と書き，実階段型の Lie 環ということにする．また，この型の行列の成分を複素数にして得られる $2(nm + ml + nl)$ 次元の 2-step nilpotent Lie 環を $\mathfrak{n}(n, m, l; \mathbb{C})$ と書き，複素階段型の Lie 環ということにする．これらは，Heisenberg type でない Lie 環であるが，これらを nilpotent part にもつ BDR-type space について次の定理を得た．

Theorem 3.2 $\{S_k(A; \mathfrak{n}(n, m, l; \mathbb{R})), g\}$ が非正（負）の断面曲率をもつ必要十分条件は $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ $(k > \frac{1}{\sqrt{2}})$ である．

Theorem 4.3 $\{S_k(A; \mathfrak{n}(n, m, l; \mathbb{C})), g\}$ が非正（負）の断面曲率をもつ必要十分条件は $k \geq 1$ $(k > 1)$ である．

§2 では，BDR-type space の断面曲率を計算する．

§3 では，Wolter [W] が証明した次の定理

Theorem 3.1 (Wolter) $\mathfrak{n}_1^m$ を $2m + 1$ 次元の Heisenberg algebra とする．このとき $\{S_k(A; \mathfrak{n}_1^m), g\}$ が非正（負）の断面曲率をもつ必要十分条件は $k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ $(k > \frac{1}{\sqrt{2}})$ である．

を紹介し，この定理が，定理 3.2 の特別な場合であることを注意する．また，定理 3.2 の証明も与える．

§4 では，Boggino の定理（即ち， BDR-type space は，非正の断面曲率をもつ.）の一般化として，次の定理を与える．

Theorem 4.2 $\mathfrak{n}$ が $|J_Z V| \leq |Z||V|$ for all $V \in \mathfrak{v}$ and $Z \in \mathfrak{z}$ を満たすならば，$k \geq 1$ に対して，BDR-type space $\{S_k(A; \mathfrak{n}), g\}$ は非正の断面曲率をもつ．

また，$\{S_k(A; \mathfrak{n}(n, m, l; \mathbb{C})), g\}$ は，定理 4.2 の仮定を満たす例であることを指摘しておく．

2 Boggino-Damek-Ricci type spaces

繰り返しになるが，BDR-type space の定義から始める．

Definition 2.1. 正定値内積をもつ可解 Lie 環 $\{\mathfrak{s}_k(A; \mathfrak{n}), \langle\ ,\ \rangle\}$ が定める単連結可解 Lie 群 $S_k(A; \mathfrak{n})$ とその上の左不変計量 g の組 $\{S_k(A; \mathfrak{n}), g\}$ を Boggino-Damek-Ricci type space（略して，BDR-type space）という．

線形写像 $J : \mathfrak{z} \to \mathrm{E}nd(\mathfrak{v})$ を

$$\langle J_Z V_1 , V_2 \rangle = \langle Z , [V_1, V_2] \rangle \qquad \text{for all } V_1, V_2 \in \mathfrak{v} \text{ and } Z \in \mathfrak{z}$$

で定義する．定義より明らかに，J_Z は skew-symmteric である．また，線形写像 J は 2-step nilpotent Lie 環 $\mathfrak{n}$ を特徴付けている．

Definition 2.2. 正定値内積をもつ 2-step nilpotent Lie 環が Heisenberg type であるとは，J が

$$J_Z{}^2 = -|Z|^2 id \qquad \text{for all } Z \text{ in } \mathfrak{z}$$

を満たすときをいう．

Definition 2.3. $\mathfrak{n}$ が Heisenberg type の Lie 環で，$k = 1$ の BDR-type space $\{S_k(A;\mathfrak{n}), g\}$ を Damek-Ricci space という．

$\mathfrak{n}$ が Heisenberg type のときには，次のような性質がある．

Lemma 2.4. $V, V' \in \mathfrak{v}$, $Z, Z' \in \mathfrak{z}$ に対して，次が成り立つ．

(i) $\ker(ad_V)^{\perp} = J_{\mathfrak{z}}V$.

(ii) $|V| = 1$ ならば, ad_V は $\ker(ad_V)^{\perp}$ から $\mathfrak{z}$ への線形同型写像である．

(iii) $|J_Z V| = |V||Z|$.

(iv) $\langle J_Z V , J_Z V' \rangle = |Z|^2 \langle V , V' \rangle$.

(v) $\langle J_Z V , J_{Z'} V \rangle = |V|^2 \langle Z , Z' \rangle$.

(vi) $[V, J_Z V] = |V|^2 Z$.

(vii) $J_Z J_{Z'} + J_{Z'} J_Z = -2 \langle Z , Z' \rangle$.

証明は，[CDKR,3-4] を見よ．

BDR-type space$\{S_k(A;\mathfrak{n}), g\}$ の Levi-Cevita 接続 ∇ と断面曲率 κ_k は J を用いて次のように表せる．

Lemma 2.5. (i) V_1, $V_2 \in \mathfrak{v}$, Z_1, $Z_2 \in \mathfrak{z}$, r_1, $r_2 \in \mathbb{R}$ に対して，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}\nabla_{V_1+Z_1+r_1A}(V_2 + Z_2 + r_2 A) &= -\frac{1}{2}J_{Z_1}V_2 - \frac{1}{2}J_{Z_2}V_1 - \frac{1}{2}kr_2V_1 \\ &\quad +\frac{1}{2}[V_1, V_2] - kr_2Z_1 \\ &\quad +\frac{1}{2}k\langle V_1 , V_2 \rangle A + k \langle Z_1 , Z_2 \rangle A.\end{aligned}$$

(ii) 正規直交ベクトル $X_1 = V_1 + Z_1 + rA$, $X_2 = V_2 + Z_2$ ($V_1, V_2 \in \mathfrak{v}$, $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{z}$, $r \in \mathbb{R}$) で張られる二次元平面 π の断面曲率 $\kappa_k(\pi)$ は，次で与えられる．

$$\begin{aligned}
\kappa_k(\pi) \ &= \ -\frac{3}{4}|[V_1, V_2] + krZ_2|^2 - \frac{1}{4}k^2r^2|V_2|^2 - \frac{1}{4}k^2r^2|Z_2|^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}|J_{Z_1}V_2|^2 + \frac{1}{4}|J_{Z_2}V_1|^2 - \langle J_{Z_1}V_1 \, , \, J_{Z_2}V_2 \rangle + \frac{1}{2}\langle J_{Z_1}V_2 \, , \, J_{Z_2}V_1 \rangle \\
&\quad - k^2(\frac{1}{2}|Z_1|^2|V_2|^2 + \frac{1}{2}|Z_2|^2|V_1|^2 + \frac{1}{4}|V_1|^2|V_2|^2 + |Z_1|^2|Z_2|^2 \\
&\quad - \langle V_1 \, , \, V_2 \rangle \langle Z_1 \, , \, Z_2 \rangle - \frac{1}{4}\langle V_1 \, , \, V_2 \rangle^2 - \langle Z_1 \, , \, Z_2 \rangle^2).
\end{aligned}$$

Proof. (i) $X, Y, W \in \{\mathfrak{s}_k(A; \mathfrak{n}), \langle \ , \ \rangle\}$ を BDR-type space$\{S_k(A; \mathfrak{n}), g\}$ の左不変ベクトル場と思うと，

$$2\langle \nabla_X Y \, , \, W \rangle = \langle [X, Y] \, , \, W \rangle - \langle [Y, W] \, , \, X \rangle - \langle [X, W] \, , \, Y \rangle$$

が成り立つ．従って，簡単な計算により

$$\begin{aligned}
\nabla_{V_1 + Z_1 + r_1 A}(V_2 + Z_2 + r_2 A) \ &= \ -\frac{1}{2}J_{Z_1}V_2 - \frac{1}{2}J_{Z_2}V_1 - \frac{1}{2}kr_2V_1 \\
&\quad + \frac{1}{2}[V_1, V_2] - kr_2Z_1 \\
&\quad + \frac{1}{2}k\langle V_1 \, , \, V_2 \rangle A + k\langle Z_1 \, , \, Z_2 \rangle A
\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる．

(ii) R を BDR-type space $\{S_k(A; \mathfrak{n}), g\}$ の Riemannian 曲率テンソルとする．

$$\begin{aligned}
\kappa_k(\pi) \ &= \ \langle R(X_1, X_2)(X_2) \, , \, X_1 \rangle \\
&= \ \left\langle \nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_2 - \nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_2 - \nabla_{[X_1, X_2]}X_2 \, , \, X_1 \right\rangle \\
&= \ |\nabla_{X_1}X_2|^2 - \langle \nabla_{X_1}X_1 \, , \, \nabla_{X_2}X_2 \rangle - \langle [X_2, [X_1, X_2]] \, , \, X_1 \rangle - |[X_1, X_2]|^2
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，Lemma 2.5(i) より，

$$\begin{aligned}
\kappa_k(\pi) &= \left| -\frac{1}{2}J_{Z_1}V_2 - \frac{1}{2}J_{Z_2}V_1 + \frac{1}{2}[V_1, V_2] + \left(\frac{1}{2}k\langle V_1\,,\,V_2\rangle + k\langle Z_1\,,\,Z_2\rangle\right)A\right|^2 \\
&\quad - \left\langle -J_{Z_1}V_1 - \frac{1}{2}krV_1\,,\,-J_{Z_2}V_2 \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \left(\frac{1}{2}k|V_1|^2 + k|Z_1|^2\right)A\,,\,\left(\frac{1}{2}k|V_2|^2 + k|Z_2|^2\right)A \right\rangle \\
&\quad - \left|\frac{1}{2}krV_2 + [V_1, V_2] + krZ_2\right|^2 \\
&= \frac{1}{4}|J_{Z_1}V_2|^2 + \frac{1}{4}|J_{Z_2}V_1|^2 - \langle J_{Z_1}V_1\,,\,J_{Z_2}V_2\rangle + \frac{1}{2}\langle J_{Z_1}V_2\,,\,J_{Z_2}V_1\rangle \\
&\quad -k^2(\frac{1}{2}|Z_1|^2|V_2|^2 + \frac{1}{2}|Z_2|^2|V_1|^2 + \frac{1}{4}|V_1|^2|V_2|^2 + |Z_1|^2|Z_2|^2 \\
&\quad -\langle V_1\,,\,V_2\rangle\langle Z_1\,,\,Z_2\rangle - \frac{1}{4}\langle V_1\,,\,V_2\rangle^2 - \langle Z_1\,,\,Z_2\rangle^2) \\
&\quad -\frac{3}{4}|[V_1, V_2] + krZ_2|^2 - \frac{1}{4}k^2r^2|V_2|^2 - \frac{1}{4}k^2r^2|Z_2|^2
\end{aligned}$$

が成り立つ．

□

3 Wolterの定理とその一般化

実階段型の Lie 環 $\mathfrak{n}(n, m, l; \mathbb{R})$ を考える．

$$\begin{aligned}
S := \{\ & (i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \ \mid\ 1 \le i \le n+m, n+1 \le j \le n+m+l, \\
& 1 \le i \le n \Rightarrow n+1 \le j \le n+m+l, \\
& n+1 \le i \le n+m \Rightarrow n+m+1 \le j \le n+m+l \ \}
\end{aligned}$$

とし，$E_{i,j}$ を行列単位とする．このとき $1 \le i \le n$, $n+1 \le j \le n+m$, $n+m+1 \le k \le n+m+l$ に対して，

$$[E_{i,j}, E_{j,k}] = -[E_{j,k}, E_{i,j}] = E_{i,k}$$

が成り立つ．$\mathfrak{n}(n, m, l; \mathbb{R})$ 上に $\{E_{i,j}\}_{(i,j)\in S}$ が正規直交基底となるように正定値内積を入れる．

Wolter [W] は次の定理を証明した．

Theorem 3.1 (Wolter). $\mathfrak{n}_1^m$ を $2m+1$ 次元の *Heisenberg algebra* とする．このとき $\{S_k(A; \mathfrak{n}_1^m), g\}$ が非正（負）の断面曲率をもつ必要十分条件は $k \ge 1/\sqrt{2}$ ($k > 1/\sqrt{2}$) である．

$2m+1$ 次元の Heisenberg algebra は，Lie 環 $\mathfrak{n}(n,m,l;\mathbb{R})$ のクラスに含まれていることを注意しておく．実際，$\mathfrak{n}(1,m,1;\mathbb{R})$ は $2m+1$ 次元の Heisenberg algebra である．

Theorem 3.2. $\{S_k(A;\mathfrak{n}(n,m,l;\mathbb{R})),g\}$ が非正（負）の断面曲率をもつ必要十分条件は $k\geq 1/\sqrt{2}$ $(k>1/\sqrt{2})$ である．

Proof. $1\leq i\leq n$, $n+1\leq j\leq n+m$, $n+m+1\leq k\leq n+m+l$ に対して，

$$J_{E_{i,k}}E_{i,j}=E_{j,k} \qquad J_{E_{i,k}}E_{j,k}=-E_{i,j}.$$

が成り立つ．

Lemma 2.5(ii) より，正規直交ベクトル $U+X+rA$, $V+Y$ $(U,V\in\mathfrak{v}$, $X,Y\in\mathfrak{z}$, $r\in\mathbb{R})$ で張られる二次元平面 π の断面曲率 $\kappa_k(\pi)$ は，次で与えられる．

$$\begin{aligned}
\kappa_k(\pi) \;=\;& -\frac{3}{4}|[U,V]+krY|^2-\frac{1}{4}k^2r^2|V|^2-\frac{1}{4}k^2r^2|Y|^2\\
&+\frac{1}{4}|J_YU|^2-\frac{1}{4}|U|^2|Y|^2+\frac{1}{4}|J_XV|^2-\frac{1}{4}|X|^2|V|^2 &(1)\\
&-\frac{1}{2}\langle J_XU\,,\,J_YV\rangle+\frac{1}{2}\langle U\,,\,V\rangle\langle X\,,\,Y\rangle &(2)\\
&+\frac{1}{2}(\langle J_XV\,,\,J_YU\rangle-\langle J_XU\,,\,J_YV\rangle) &(3)\\
&-\frac{1}{2}(\frac{1}{4}|U|^2|V|^2-\frac{1}{4}\langle U\,,\,V\rangle^2+|X|^2|Y|^2-\langle X\,,\,Y\rangle^2) &(4)\\
&-(k^2-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}|U|^2|Y|^2+\frac{1}{2}|V|^2|X|^2-\langle U\,,\,V\rangle\langle X\,,\,Y\rangle\\
&+\frac{1}{4}|U|^2|V|^2+|X|^2|Y|^2-\frac{1}{4}\langle U\,,\,V\rangle^2-\langle X\,,\,Y\rangle^2).
\end{aligned}$$

X,Y,U,V を正規直交基底 $\{E_{i,j}\}_{(i,j)\in S}$ に関する一次結合で表示して，計算することにより，$(1)+(2)\leq 0$ が成り立つことがわかる．また，

$$\langle J_XV\,,\,J_YU\rangle-\langle J_XU\,,\,J_YV\rangle \;\leq\; |X||Y||U||V|$$

も示せる．$V=\alpha U+W$, $Y=\beta X+Z$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $W\in\mathfrak{v}$ with $\langle U\,,\,W\rangle=0$, $Z\in\mathfrak{z}$ with $\langle X\,,\,Z\rangle=0)$ と表されているとする．このとき，

$$\begin{aligned}
(3)+(4) \;=\;& \frac{1}{2}(\langle J_XW\,,\,J_ZU\rangle-\langle J_XU\,,\,J_ZW\rangle)-\frac{1}{2}(\frac{1}{4}|U|^2|W|^2+|X|^2|Z|^2)\\
\leq\;& \frac{1}{2}|X||Z||U||W|-\frac{1}{8}|U|^2|W|^2-\frac{1}{2}|X|^2|Z|^2\\
=\;& -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}|U||W|-|X||Z|)^2\\
\leq\;& 0
\end{aligned}$$

が成り立つ.

以上より，$k \geq 1/\sqrt{2}$ に対して，$\kappa_k(\pi) \leq 0$ が成り立つことがわかる.

次に，$k > 1/\sqrt{2}$ に対して，$\kappa_k(\pi) < 0$ を示したい.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}|U|^2|Y|^2 + \frac{1}{2}|V|^2|X|^2 - \langle U, V \rangle \langle X, Y \rangle \\ &\quad + \frac{1}{4}|U|^2|V|^2 + |X|^2|Y|^2 - \frac{1}{4}\langle U, V \rangle^2 - \langle X, Y \rangle^2 \end{aligned}$$

となるのは，$U+X+rA$ と $V+Y$ が正規直交ベクトルであることより，$U=0$, $X=0$, $r=1$ のときである．このとき，$r^2|Y|^2 \neq 0$ 又は $r^2|V|^2 \neq 0$ なので，$k > 1/\sqrt{2}$ に対して，$\kappa_k(\pi) < 0$ が成り立つ.

正規直交ベクトル $E_{1,n+1}$, $E_{1,n+m+1}$ で張られる二次元平面 σ を考える．この平面の断面曲率は

$$\kappa_k(\sigma) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}k^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - k^2)$$

で与えられる.

以上より定理 3.2 は証明できた. □

4 Boggino の定理とその一般化

Theorem 4.1 (Boggino). *Damek-Ricci space* は非正の断面曲率をもつ.

この定理は，次の定理の特別な場合として得られる.

Theorem 4.2. $\mathfrak{n}$ が $|J_Z V| \leq |Z||V|$ *for all* $V \in \mathfrak{v}$ *and* $Z \in \mathfrak{z}$ を満たすならば，$k \geq 1$ に対して，*spaces of BDR-type* $\{S_k(A;\mathfrak{n}), g\}$ は非正の断面曲率をもつ.

Proof. Lemma 2.5(ii) より正規直交ベクトル $U+X+rA$, $V+Y$ （$U, V \in \mathfrak{v}, X, Y \in \mathfrak{z}, r \in \mathbb{R}$）で張られる二次元平面 π の断面曲率 $\kappa_k(\pi)$ は，次で与え

られる.

$$
\begin{aligned}
\kappa_k(\pi) \;=\;& -\frac{3}{4}|[U,V]+krY|^2-\frac{1}{4}k^2r^2|V|^2-\frac{1}{4}k^2r^2|Y|^2 \\
& -\frac{1}{4}(|U|^2|Y|^2-|J_YU|^2)-\frac{1}{4}(|V|^2|X|^2-|J_XV|^2) && (5)\\
& -\frac{1}{4}|U|^2|Y|^2-\frac{1}{4}|V|^2|X|^2-\frac{1}{2}\langle J_XU\,,\,J_YV\rangle && (6)\\
& -\frac{1}{4}|U|^2|V|^2+\frac{1}{4}\langle U\,,\,V\rangle^2-|X|^2|Y|^2+\langle X\,,\,Y\rangle^2 && (7)\\
& -\frac{1}{2}\langle J_XU\,,\,J_YV\rangle+\frac{1}{2}\langle J_XV\,,\,J_YU\rangle && (8)\\
& +\langle U\,,\,V\rangle\langle X\,,\,Y\rangle && (9)\\
& -(k^2-1)(\frac{1}{2}|U|^2|Y|^2+\frac{1}{2}|V|^2|X|^2-\langle U\,,\,V\rangle\langle X\,,\,Y\rangle \\
& +\frac{1}{4}|U|^2|V|^2-\frac{1}{4}\langle U\,,\,V\rangle^2+|X|^2|Y|^2-\langle X\,,\,Y\rangle^2).
\end{aligned}
$$

$|J_ZV|\le|Z||V|$ for $V\in\mathfrak{v}$, $Z\in\mathfrak{z}$ という仮定より,

$$(5)\le 0,$$

$$
\begin{aligned}
(6) \;\le\;& -\frac{1}{4}|U|^2|Y|^2-\frac{1}{4}|V|^2|X|^2+\frac{1}{2}|X||U||Y||V| \\
=\;& -\frac{1}{4}(|U||Y|-|V||X|)^2 \\
\le\;& 0
\end{aligned}
$$

が成り立つ. $V=\alpha U+W, Y=\beta X+Z$ ($\alpha,\beta\in\mathbb{R}, W\in\mathfrak{v}$ with $\langle U\,,\,W\rangle=0$, $Z\in\mathfrak{z}$ with $\langle X\,,\,Z\rangle=0$) と表されているとする. このとき,

$$
\begin{aligned}
(7)+(8) \;=\;& -\frac{1}{4}|U|^2|W|^2-|X|^2|Z|^2-\frac{1}{2}\langle J_XU\,,\,J_ZW\rangle+\frac{1}{2}\langle J_XW\,,\,J_ZU\rangle \\
\le\;& -\frac{1}{4}|U|^2|W|^2-|X|^2|Z|^2+|X||Z||U||W| \\
=\;& -(\frac{1}{2}|U||W|-|X||Z|)^2 \\
\le\;& 0
\end{aligned}
$$

が成り立つ. $U+X+rA, V+Y$ は正規直交ベクトルより,

$$(9)=-\langle X\,,\,Y\rangle^2\le 0$$

が成り立つ.

以上より, $k\ge 1$ に対して, $\kappa_k(\pi)\le 0$ が成り立つ. □

複素階段型の Lie 環 $\mathfrak{n}(n,m,l;\mathbb{C})$ を考える．$E_{i,j}$ を行列単位とし，$F_{i,j} := \sqrt{-1}E_{i,j}$ とする．このとき $1 \le i \le n$, $n+1 \le j \le n+m$, $n+m+1 \le k \le n+m+l$ に対して,

$$\begin{aligned}
[E_{i,j}, E_{j,k}] &= -[E_{j,k}, E_{i,j}] = E_{i,k}, \\
[E_{i,j}, F_{j,k}] &= -[F_{j,k}, E_{i,j}] = F_{i,k}, \\
[F_{i,j}, E_{j,k}] &= -[E_{j,k}, F_{i,j}] = F_{i,k}, \\
[F_{i,j}, F_{j,k}] &= -[F_{j,k}, F_{i,j}] = -E_{i,k}
\end{aligned}$$

が成り立つ．$\mathfrak{n}(n,m,l;\mathbb{C})$ 上に $\{E_{i,j}, F_{i,j}\}_{(i,j)\in S}$ が，正規直交基底となるように正定値内積を入れる．

Theorem 4.3. $\{S_k(A;\mathfrak{n}(n,m,l;\mathbb{C})), g\}$ が非正（負）の断面曲率をもつ必要十分条件は，$k \ge 1$ $(k > 1)$ である．

Proof. $1 \le i \le n$, $n+1 \le j \le n+m$, $n+m+1 \le k \le n+m+l$ に対して,

$$\begin{aligned}
J_{E_{i,k}}E_{i,j} &= E_{j,k},\ J_{E_{i,k}}E_{j,k} = -E_{i,j}, \\
J_{E_{i,k}}F_{i,j} &= F_{j,k},\ J_{E_{i,k}}F_{j,k} = -F_{i,j}, \\
J_{F_{i,k}}E_{i,j} &= F_{j,k},\ J_{F_{i,k}}F_{j,k} = -E_{i,j}, \\
J_{F_{i,k}}F_{i,j} &= E_{j,k}\ J_{F_{i,k}}E_{j,k} = -F_{i,j}
\end{aligned}$$

が成り立つ．X, Y, U, V を正規直交基底 $\{E_{i,j}, F_{i,j}\}_{(i,j)\in S}$ に関する一次結合で表示して，計算することにより,

$$|J_Z V| \le |Z||V| \qquad \text{for } V \in \mathfrak{v} \text{ and } Z \in \mathfrak{z} \tag{10}$$

が成り立つことがわかる．よって，(10) と定理 4.2 より，$k \le 1$ に対して，BDR-type space $\{S_k(A;\mathfrak{n}(n,m,l;\mathbb{C})), g\}$ は，非正の断面曲率をもつことがわかる．

また，定理 3.2 の場合と同様にして，$k > 1$ に対して，BDR-type space $\{S_k(A;\mathfrak{n}(n,m,l;\mathbb{C})), g\}$ は，負の断面曲率をもつことも示せる．

正規直交ベクトル $\sqrt{2}/\sqrt{3}E_{1,n+1} + 1/\sqrt{3}E_{1,n+m+1}$, $\sqrt{2}/\sqrt{3}F_{1,n+1} + 1/\sqrt{3}F_{1,n+m+1}$ で張られる二次元平面 σ を考える．この平面の断面曲率は

$$\kappa_k(\sigma) = \frac{4}{9}(1-k^2).$$

で与えられる．

以上より定理 4.3 は証明できた．

$\square$

References

[BTV] J. Berndt, F. Tricerri and L. Vanhecke: *Generalized Heisenberg Grops and Damek-Ricci Harmonic Spaces.* Lecture Notes in Math. **1598**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1995.

[B] J. Boggino: *Generalized Heisenberg groups and solvmanifolds naturally associated.* Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **43** (1985), 529–547.

[CDKR] M. Cowling, A. H. Dooley, A. Koranyi, F. Ricci: *H-type groups and Iwasawa decompositions.* Adv. in Math. **87** (1991), 1–41.

[H] E. Heintze: *On homogeneous manifolds of negative curvature.* Math. Ann. **211** (1974), 23–34.

[L] M. Lanzendorf: *Einstein metrics with nonpositive Sectional curvature on extentions of Lie algebras of Heisenberg type.* Geometriae Dedicate **66** (1997), 187–202.

[M] K. Mori: *Einstein metrics on B.D.R.type solvable groups.* Preprint.

[U] M. Uno: *On Boggino-Damek-Ricci type spaces with non-positive sectional curvature.* Master thesis, Osaka university (1998), in Japanese.

[W] T. Wolter: *Einstein metrics on solvable groups.* Math. Z. **206** (1991), 457–471.

[Y] K. Yamada: *Einstein metrics on certain solvable groups.* Master thesis, Osaka university (1996), in Japanese.